

Feb: 1:

24/04/2018
Ανδρουή Γεωλ.

▷ Εξίσωση 2ου βαθμού στο επίπεδο

Θα εξετάσουμε την εξίσωση:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (*)$$

στο επίπεδο.

Εάν $A=B=C=0$, τότε η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι
 $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Θα δείξουμε ότι η (*) παριστάνει πάντα κωνική τολή.
Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση $B=0$:

• Έστω ότι $A \cdot C \neq 0$ τότε έχουμε την εξίσωση.

$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Με ολοκλήρωση τετραγώνων η τελευταία εξίσωση παίρνει την μορφή

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{C^2} - F$$

κάνοντας παράλληλη μεταφορά $\begin{cases} x = X - \frac{D}{A} \\ y = Y - \frac{E}{C} \end{cases}$

η εξίσωση γίνεται $AX^2 + CY^2 = F^*$, όπου $F^* = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$

i.) Εάν $F^* = 0$ και $A \cdot C < 0 \Rightarrow$ ζεύγος ευθειών

ii.) Αν $F^* \neq 0$ και $A \cdot C > 0 \Rightarrow$ ελλειψη ή $\emptyset$

iii.) Αν $F^* \neq 0$ και $A \cdot C < 0 \Rightarrow$ υπερβολή

iv.) $F^* = 0$ & $A \cdot C > 0 \Rightarrow$ σημείο.

• $|Ac=0|$ χωρίς βλάβη της γενικότητας ως υποθέ-
τουμε $A \neq 0$ και $C=0$.

Τότε η εξίσωση λαμβάνει την μορφή
 $Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Με συμπλήρωση τετραγώνων λαμβάνουμε
 $A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + 2Ey + F = 0$

Συνεπώς,

- (i) $E=0, AF^* > 0$: $\emptyset$ σύνολο.
- (ii) $E=0, AF^* \leq 0$: Σύνολο ευθειών
- (iii) $E \neq 0$: παραβολή.

Παράδειγμα: Να βρεθεί τι παριστάνει η εξίσωση:
 $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$

Με συμπλήρωση τετραγώνων η εξίσωση γράφεται
 $(x+1)^2 + 4(y+2)^2 = 1 + 16 - 13 \Rightarrow (x+1)^2 + 4(y+2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} \quad \gamma$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$$

κάνοντας παράλληλη μεταφορά

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 2 \end{cases} \quad \text{η εξίσωση γίνεται}$$

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \quad \text{έλλειψη.}$$

▷ Σημείωση: Ας υποθέσουμε ότι είχαμε την εξίσωση
 $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + \lambda = 0$

Με συμπλήρωση τετραγώνων :

$$(x+1)^2 + 4(y+2)^2 = 1 + \lambda$$

Αν $1 + \lambda < 0 \rightarrow \emptyset$

Αν $1 + \lambda = 0 \rightarrow$ σημείο

Αν $1 + \lambda > 0 \rightarrow \emptyset$

Παράδειγμα: Να βρεθεί τι παριστάνει η εξίσωση:

$$9x^2 - 4y^2 - 24y - 18x + 45 = 0$$

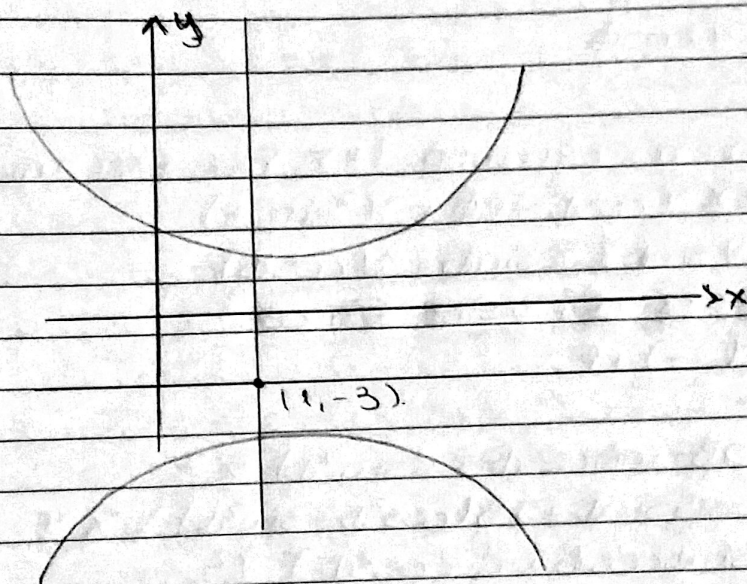
Με συμπ. τετράγ. η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$9(x-1)^2 - 4(y+3)^2 = -12 \Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{18} = 1$$

Θέτουμε $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 3 \end{cases}$

η εξίσωση λαμβάνει την μορφή: $\frac{Y^2}{18} - \frac{X^2}{8} = 1$

υπερβολή



Παράδειγμα: Τι παριστάνει η εξίσωση: $x^2 + 4y - 6x + 1 = 0$

Με συμπ. τετράγ. βρίσκουμε

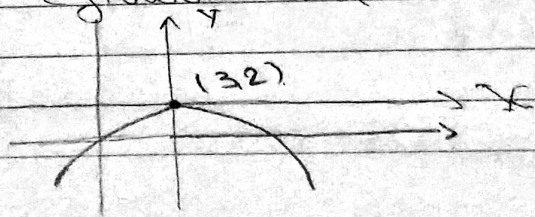
$$(x-3)^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + 4(y-2) = 0$$

κανοντας την παρ. μεταφορά: $\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$X^2 + 4Y = 0$$

παραβολή



ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $B \neq 0$:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (*)$$

Θα κάνουμε στροφή των συστ. συντεταγμένων κατά γωνία ϕ , έτσι ώστε στο νέο σύστημα η εξίσωση να μην έχει όρο " xy "

Τότε οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων είναι

$$\begin{cases} x = X \cos \phi - Y \sin \phi \\ y = X \sin \phi + Y \cos \phi \end{cases}$$

Στο νέο σύστημα η εξίσωση (*) θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} 0 = & A(X^2 \cos^2 \phi - 2XY \cos \phi \sin \phi + Y^2 \sin^2 \phi) \\ & + 2B(X \cos \phi - Y \sin \phi)(X \sin \phi + Y \cos \phi) \\ & + C(X^2 \sin^2 \phi + 2XY \cos \phi \sin \phi + Y^2 \cos^2 \phi) \\ & + 2D(\dots) + 2E(\dots) + F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 = & (A \cos^2 \phi + 2B \sin \phi \cos \phi + C \sin^2 \phi) X^2 \\ & + \{-2(A-C) \cos \phi \sin \phi + 2B(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)\} XY \\ & + (A \sin^2 \phi - 2B \sin \phi \cos \phi + C \cos^2 \phi) Y^2 \\ & + 2D(\dots) + 2E(\dots) + F \end{aligned}$$

Επιλέγοντας γωνία στροφής ϕ έτσι ώστε

$$(A-C) 2 \cos \phi \sin \phi = 2B(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$$

$$\Leftrightarrow (A-C) \sin 2\phi = 2B \cos 2\phi$$

$$\Leftrightarrow \tan 2\phi = \frac{2B}{A-C}$$

η εξίσωση (*) λαμβάνει την μορφή

$$\tilde{A}X^2 + \tilde{C}Y^2 + 2\tilde{D}X + 2\tilde{E}Y + \tilde{F} = 0$$

Αυτή την περίπτωση την μελετήσαμε.

ΤΕΛΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η Εξίσωση (*) περιγράφει κυκλική τολή:

Παράδειγμα Να μετριάσει η κοίτη με εξίσωση
 $5x^2 - 6\sqrt{3}xy - y^2 + 16 = 0$

Θα κάνουμε στροφή κατά γωνία ϕ .

$$\tan 2\phi = \frac{2B}{A-C} \Rightarrow \tan 2\phi = \frac{-6\sqrt{3}}{5+1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\phi = \pi/3}$$

Θα κάνουμε την στροφή

$$\begin{aligned} x &= X \cos \phi - Y \sin \phi \\ y &= X \sin \phi + Y \cos \phi \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} X - \frac{\sqrt{3}}{2} Y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} X + \frac{1}{2} Y \end{cases}$$

Στο νέο σύστημα θα έχουμε:

$$0 = \frac{5}{4} (X - \sqrt{3}Y)^2 - \frac{6\sqrt{3}}{4} (X - \sqrt{3}Y)(\sqrt{3}X + Y) - \frac{1}{4} (\sqrt{3}X + Y)^2 + 16$$

$$\Rightarrow 0 = 5(X^2 - 2\sqrt{3}XY + 3Y^2) - 6\sqrt{3}(\sqrt{3}X^2 - \sqrt{3}Y^2 - 2XY) - (3X^2 + 2\sqrt{3}XY + Y^2) + 64$$

$$\text{Επομένως } \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{2} = 1, \quad \underline{\text{ΥΠΕΡΒΟΛΗ}}$$

Παράδειγμα: Να σχεδιαστεί η καμπύλη με εξίσωση:
 $x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 7 = 0$

Την αρχή θα κάνουμε στροφή κατά γωνία ϕ έτσι ώστε

$$\tan 2\phi = \frac{2B}{A-C} = \frac{-4}{1-1} = \infty \Rightarrow 2\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\phi = \pi/4}$$

Συνεπώς κάνουμε την αλλαγή

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \phi - \bar{y} \sin \phi \\ y = \bar{x} \sin \phi + \bar{y} \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x} + \bar{y}) \end{cases}$$

Η εξίσωση θα πάρει την μορφή:

$$0 = \frac{1}{2} (\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) - \frac{4}{2} (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + \frac{1}{2} (\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2)$$

$$+ \frac{10}{\sqrt{2}} (\bar{x} - \bar{y}) - \frac{8}{\sqrt{2}} (\bar{x} + \bar{y}) + 7$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 - \sqrt{2}\bar{x} + 9\sqrt{2}\bar{y} - 7 = 0$$

Με συμπλήρωση τετρ. έχουμε:

$$\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3\left(\bar{y} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -4$$

$$\text{Θέτουμε } \begin{cases} \tilde{\bar{x}} = \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{\bar{y}} = \bar{y} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{η εξίσωση γίνεται: } -\frac{\tilde{\bar{x}}^2}{4} + \frac{\tilde{\bar{y}}^2}{4/3} = 1, \text{ υπερβολή}$$

Παραδειγμα: Τι παριστάνει η κομπύλη με εξίσωση
 $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

Η εξίσωση γράφεται ως εξής:
 $ax^2 + bx - y + \gamma = 0$

Με συμπ. τετρ. έχουμε
 $a(x + b/2a)^2 - (y + \gamma - b^2/4a) = 0$

Θέτουμε $\begin{cases} x = \bar{x} - b/2a \\ y = \bar{y} - (\gamma - b^2/4a) \end{cases}$

η εξίσωση γίνεται $a\bar{x}^2 - \bar{y} = 0$, παραβολή